

Spojitosť a derivace

9. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Příklady:

1. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + 4^x \sqrt{x}}{1 + 3^x \sqrt{x}} \right)^{\frac{\sqrt{e^x - \cos x}}{x^2}}$$

2. Spočítejte derivace následujících funkcí, vyšetřete spojitost, případně rozhodněte, zdali je možné funkce spojitě dodefinovat na \mathbb{R} :

a) $f(x) = x^2 \cdot \text{sign } x$

e) $f(x) = |x^3|$

b) $f(x) = |x - 3|$

f) $f(x) = e^{-x^{-2}}$ (zde nepočítejte derivaci)

c) $f(x) = x \cdot \lfloor x \rfloor$

d) $f(x) = \begin{cases} 3 \sin(-x), & \text{když } x \geq 0 \\ x^2 - 3x, & \text{když } x < 0 \end{cases}$

g) $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$ (zde spočítejte derivaci, pokud existuje, pouze v nule)

3. Spočítejte derivace následujících funkcí a vyšetřete spojitost (odvážní mohou zkusit funkce spojitě rozšířit na hranici):

a) $(x^2 - 7x + 14)^3$

d) x^x

b) $\sin x \cdot \cos x$

e) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

c) $\sin^2 x + \cos^2 x$

f) $\log(x^2 + x + 1)$

4. Dvě chodby široké 2 m a 5 m se křižují v pravém úhlu. Zjistěte maximální délku žebříku, který je možno přenést ve vodorovné poloze z jedné chodby do druhé.

5. Spočítejte derivace následujících funkcí a vyšetřete spojitost:

a) $(x^2 + 51x + 119)^{87}$

h) $\log \arccos x$

b) $(x + 15)^3(x - 17)^{10}x^9$

i) $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}$

c) $\frac{e^{x^2+1} \cdot \cos x}{(x+1)^2 \cdot \log(x^2+1)}$

j) $\arctan e^x - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

d) $\log(x^2 + x + 1)$

k) $\arctan \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

e) $\sin(\cos((x^3 + 17x^2 - 56x + 1)^{18}))$

l) $(\arctan x)^{\arcsin x}$

f) $(\sin x)^{\cos x}$

m) $f(x) = e^{\frac{1}{\log|x|}}$